PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA LA MANCHA

JULIO – 2019

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) a) Estudia la continuidad en todo R de la función $f(x)=\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.

b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)=x\cdot e^{-x}$.

----

a)

Las funciones racionales son continuas se su dominio, que es R, excepto para los valores de la variable que anulan el denominador.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1.$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\frac{-2-1+1}{1-1}=\frac{-2}{0}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\frac{-2-1+1}{1^- -1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\frac{-2-1+1}{1^- -1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty.$$

$$\underline{Para\ x=-1 \Rightarrow f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ 1^{\underline{a}}\ especie.}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\frac{2-1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L´Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{6x^2-2x-1}{2x}=\frac{6\cdot 1^2-2\cdot 1-1}{2\cdot 1}=\frac{6-2-1}{2}=\frac{3}{2}.$$

$$\underline{Para\ x = 1 \Rightarrow f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ evitable\ de\ 1^{a}\ especie.}$$

$$2x^3 - x^2 - x = 0;\ \ x(2x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ \ 2x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_3 = 1 \Rightarrow 2x^3 - x^2 - x = x(2x+1)(x-1).$$

La función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ puede redefinirse para $x = 1$ de la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2 + x}{x+1}.$$

$b)$

La condición necesaria para que una función tenga un punto crítico (máximo o mínimo) es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x).$$

$$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) + e^{-x}(-1) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = -e^{-x}(2 - x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0;\ \ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$f''(1) = -e^{-1}(2 + 1) = -\frac{3}{e} < 0 \Rightarrow Máx.\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\underline{Máximo\ relativo: P\left(1, \frac{1}{e}\right).}$$

****

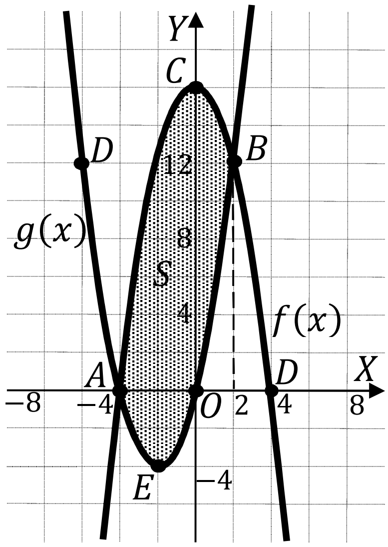
2º) a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x + 2)^2 - 4$.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

----

a)

Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$f(x) = g(x) \Rightarrow 16 - x^2 = (x + 2)^2 - 4;$$

$$16 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - 4;\;\; 2x^2 + 4x - 16 = 0;$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0;\; x = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{-2\pm 6}{2} =$$

$$= -1 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \rightarrow A(-4, 0) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 10) \end{cases}.$$

La función $f(x) = 16 - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo vértice es el punto $C(0, 16)$. Otros puntos de la parábola son $A(-4, 0), B(2, 12)$ y $D(4, 0)$.

La función $g(x) = (x + 2)^2 - 4 = x^2 + 4x$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow Vértice{:}\, E(-2, -4).$$

Otros puntos de la parábola son $A(-4, 0), B(2, 12)$ y $O(0, 0)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular todas las ordenadas de $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$, por lo cual la superficie es la siguiente:

$$S = \int_{-4}^{2} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-4}^{2} [(16 - x^2) - (x^2 + 4x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-4}^{2} (-2x^2 - 4x + 16) \cdot dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 16x\right]_{-4}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 16x\right]_{-4}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2\cdot 2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2\right) - \left[-\frac{2\cdot(-4)^3}{3} - 2 \cdot (-4)^2 + 16 \cdot (-4)\right] =$$

$$= -\frac{16}{3} - 8 + 32 - \frac{128}{3} + 32 + 64 = 120 - \frac{144}{3} = 120 - 48 = 72.$$

$$\underline{S = 72\, u^2}.$$

$b)$

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = -2x \;\Rightarrow m = f'(1) = -2 \cdot 1 = -2.$$

El puntos de tangencia es el siguiente:

$$f(1) = 16 - 1^2 = 16 - 1 = 15 \Rightarrow P(1, 15).$$

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$. La recta tangente pedida es la siguiente:

$$y - 15 = -2(x - 1) = -2x + 2 \;\Rightarrow\; \underline{t \equiv 2x + y - 17 = 0}.$$

****

3º) $a)$ Discute el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x-(a-2)y-z=1 \\ x-2y+z=-4 \\ x-3y+az=-a^2 \end{array}\right\}$ en función del parámetro real $a \in R$.

$b)$ Resuélvelo razonadamente para el valor $a=3$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & a & -a^2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2-a & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a+3+(2-a)-2+3-a(2-a)=0;$$

$$4-2a+2-a-2a+a^2=0;\ \ a^2-5a+6=0;\ \ a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=2, a_2=3.$$

$$\underline{Para\ \begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq 3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 8-3+2-12=-5 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a=2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{Gauss\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 = 2F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a=3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a = 3$ el sistema resulta $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + 3z = -9 \end{cases}$, que es compatible indeterminado; despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera, y haciendo $z = \lambda$;

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 + \lambda \\ x - 2y = -4 - \lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y = 1 + \lambda \\ -x + 2y = 4 + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5 + 2\lambda.$$

$$x - y = 1 + \lambda; \;\; x - 5 - 2\lambda = 1 + \lambda \Rightarrow x = 6 + 3\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = 6 + 3\lambda, \;\; y = 5 + 2\lambda, \;\; z = \lambda, \;\; \forall\lambda \in R.}$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda, \mu \in R$.

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano β perpendicular al plano π y que contiene a la recta r.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x - 1 = -y \\ 2x - 2 = -z \end{Bmatrix} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \ \ 2y - (z+1) - (z+1) + 2(x-1) = 0;$$

$$2y - 2z - 2 + 2x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ \pi \equiv x + y - z - 2 = 0.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M \ y \ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Ran\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2. -- $Ran\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3. -- $Ran\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

$b)$

Un punto y un vector director de la recta r son $P(1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-1,1,2)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,1,-1)$.

La expresión general del plano β es la siguiente:

$$\beta \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \;\; -(x-1) + 2y - z - z - 2(x-1) - y = 0;$$

$$-3(x-1) + y - 2z = 0; \; -3x + 3 + y - 2z = 0.$$

$$\underline{\beta \equiv 3x - y + 2z - 3 = 0}.$$

****

5º) a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son $P(A)=0{,}75\ y\ P(B)=0{,}35$. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A\cup B\ y\ A\cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a_1) A y B fuesen independientes. a_2) Si $P(A/B)=0{,}6$.

Nota: $P(A/B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b_1) Si en una hora recibe cinto cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima.

b_2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos?

----

a)

$Datos$: $P(A)=0{,}75\ y\ P(B)=0{,}35$

a_1)

Si A y B son independientes se cumple que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

$$P=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=$$

$$=0{,}75+0{,}35-0{,}75\cdot 0{,}35=1{,}10-0{,}2625=\underline{0{,}8375}.$$

$$P=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}75\cdot 0{,}35=\underline{0{,}2625}.$$

a_2)

$$P(A/B)=0{,}6\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0{,}6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0{,}6\cdot P(B)=0{,}6\cdot 0{,}35=\underline{0{,}21}.$$

$$P=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}75+0{,}35-0{,}21=$$

$$=1{,}1-0{,}21=\underline{0{,}89}.$$

b)

$Datos$: $p=0{,}01;\ \ q=0{,}99$.

La fórmula de la probabilidad de que de n elementos r sean favorables es la siguiente: $P=\binom{n}{r}\cdot p^r\cdot q^{n-r}$.

$b_1)$

El suceso contrario a “que tenga algún cheque sin fondos” es “que no tenga ningún cheque sin fondos”, por la cual la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^5 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}951 = \underline{0{,}049}.$$

$b_2)$

$$P = P(3) + P(4) + P(5) =$$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^1 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^0 =$$

$$= \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}81 + 5 \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}00001 \cdot 1 =$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}00081 + 0{,}00045 + 0{,}00001 = 0{,}0081 + 0{,}00046 = \underline{0{,}00856}.$$

****

PROPUESTA B

1º) a) Demuestra que la ecuación $sen\, x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$.

----

a)

La función $f(x) = sen\, x - 2x + 1$ es continua en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, al intervalo $[0, \pi]$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$$f(0) = sen\, 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1 > 0.$$

$$f(\pi) = sen\, \pi - 2\pi + 1 = 0 - 2\pi + 1 < 0.$$

$$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ la\ función\ f(x)\ tiene\ una\ raíz\ en\ [0, 2], c.q.d.}$$

b)

Si la ecuación $sen\, x - 2x + 1 = 0$ tiene otra solución, además de la indicada en el apartado anterior, a la función $f(x) = sen\, x - 2x + 1$ le es aplicable el teorema de Rolle, que dice que: "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

$$f'(x) = cos\, x - 2 \neq 0, \forall x \in R.$$

$$\underline{El\ número\ exacto\ de\ soluciones\ en\ [-200, 200]\ es\ una.}$$

****

2º) Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$a)\ \ I = \int_0^1 (x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx.$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \cdot dx.$

Nota: en la integral $b)$ puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

$a)$

$$I = \int_0^1 (x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx.$$

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida.

$$A = \int (x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x+1 \to du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \to v = -e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}(x+1) + \int e^{-x} \cdot dx =$$

$$= -e^{-x}(x+1) - e^{-x} = -e^{-x}(x+2).$$

$$I = \int_0^1 (x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx = [-e^{-x}(x+2)]_0^1 = [e^{-x}(x+2)]_1^0 =$$

$$= [e^{-0}(0+2)] - [e^{-1}(1+2)] = 2 - \frac{3}{e} = \frac{2e-3}{e}.$$

$$\underline{I = \int_0^1 (x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx = \frac{2e-3}{e}.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \to \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2 \cdot dt \\ 1 + x = 1 + t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \int \frac{1}{1+t^2} \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot arc\ tag\ t + C = 2 \cdot arc\ tag\ \sqrt{x} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \cdot dx = 2 \cdot arc\ tag\ \sqrt{x} + C.}$$

****

3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in R$.

b) Para $a=1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = a(a+2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -2$$

$$\underline{Para \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = 3.}$$

Para $a=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$

Para $a=-2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

$$\underline{Para \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = 2.}$$

b)

Para $a=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

$X \cdot A = B - X;\ \ X \cdot A + X = B;\ \ X \cdot A + X \cdot I = B;\ \ X(A+I) = B;$

$X \cdot (A+I) \cdot (A+I)^{-1} = B \cdot (A+I)^{-1};\ X \cdot I = B \cdot (A+I)^{-1} \Rightarrow \underline{X = B \cdot (A+I)^{-1}}.$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de $(A+I)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A+I|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \leftrightarrow F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{8}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - 4F_3 \\ F_2 \to F_2 - \frac{1}{2}F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$X = B \cdot (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}.}$$

****

4º) a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2), \vec{v} = (a, b, 1)\ y\ \vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de $a, b\ y\ c$ para que los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)\ y\ R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta.

----

a)

Los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son ortogonales cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} = (-1, 0, -2) \cdot (a, b, 1) = 0;\ -a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & b & 1 \end{vmatrix} = \vec{w};\ \ 4j - bk + 2bi + j = (2, 5, c);$$

$$2bi + 5j - bk = (2, 5, c);\ \ (2b, 5, -b) = (2, 5, c) \Rightarrow b = 1; c = -1.$$

$$\underline{a = -2, b = 1, c = -1}.$$

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)\ y\ R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (1, 1, 2)$.

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}}.$$

Un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \\ Q(1, 5, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -1 + \lambda = 1 \\ 3 + \lambda = 5 \\ 1 + 2\lambda = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 2\ \Rightarrow\ \underline{Q \in r}.$$

$$\left. \begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \\ R(0, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -1 + \lambda = 0 \\ 3 + \lambda = 4 \\ 1 + 2\lambda = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \notin R\ \Rightarrow\ \underline{R \notin r}.$$

****

5º) a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a_1) Que no tenga menos de 36 meses.

a_2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña.

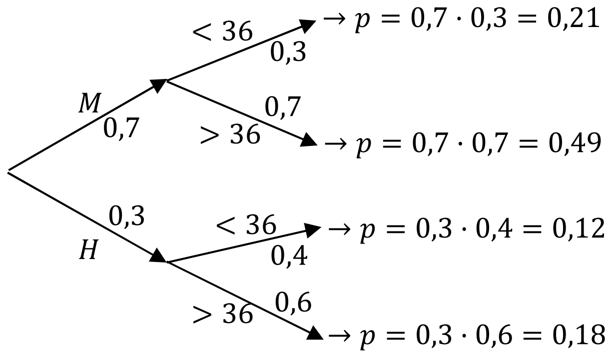
b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b_1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos.

b_2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos.

----

a)



a_1)

$$P = P(>36) = P(M) \cdot P(>36/M) + P(H) \cdot P(>36/H) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}49 + 0{,}18 = \underline{0{,}67}.$$

a_2)

$$P = P(M| < 36) = \frac{P(M \cap <36)}{P(<36)} = \frac{P(M) \cdot P(<36/M)}{P(H) \cdot P(<36/H) + P(M) \cdot P(<36/M)} =$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}21}{0{,}21 + 0{,}12} = \frac{0{,}21}{0{,}33} = \underline{0{,}6364}.$$

b)

$Datos$: $\mu = 60;\ \sigma = 10.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(60, 10).$

$b_1)$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-60}{10}$.

$$P = P(X \geq 75) = P\left(Z \geq \frac{75-60}{10}\right) = P\left(Z \geq \frac{15}{10}\right) = P(Z \geq 1{,}5) =$$

$$= 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \underline{0{,}0668}.$$

$b_2)$

$n = 450.$

$N = p \cdot n = 0{,}0668 \cdot 450 = 30$ sacaron 75 puntos o más.

$450 - 30 = 420.$

$$\underline{Sacaron\ menos\ de\ 75\ puntos\ 420\ opositores}.$$

****